Jörg Roth

Thema: Approximation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Facharbeit in Mathematik

Lehrer : Frank

Schule: Max Planck Gymnasium

Schuljahr: 1983/84

Kurs: 12/2

Fach: Mathematik

Name des Schülers: Jörg Roth

Thema: Approximation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Name das Fachlehrers: Frank

Ausgabetermin des Themas: 24.2.1984

Abgabetermin der Arbeit:

....

(Unterschrift des Schülers)

....

(Unterschrift des Fachlehrers)

Die vorliegende Facharbeit wurde am .... eingereicht.

Note:...................../......... Punkte

....

(Unterschrift des Fachlehrers)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Approximation, also die Annäherung gegebener Punkte oder Funktionen durch eine neue Funktion, spielt heutzutage eine wichtige Rolle in der Wissenschaft und Mathematik.

Die bedeutendsten Einsatzgebiete sind:

1. In der Naturwissenschaft:
   In vielen Naturwissenschaften werden Versuche gemacht, bei denen empirische Daten ermittelt werden. Von diesen Daten ist bekannt, daß sie mit einem Meßfehler behaftet sind. Um jedoch den rechnerischen Zusammenhang der Daten zu erhalten, muß ein Funktionsterm gefunden werden, der alle Meßpunkte möglichst gut annähert.
2. In der Mathematik:
   Oft sind Funktionen zu kompliziert um gezielte Aussagen zu treffen wie z.B. über Nullstellen oder Ableitungen usw. Man sucht daher eine neue Funktion, die in etwa dem Verlauf der ersten Funktion gleicht, aber viel einfacher aufgebaut ist.
3. In der Informatik:
   Rechenanlagen können z.B. trigonometrische Funktionen nicht direkt berechnen, da sie alle mathematischen Operationen auf die Addition und die Multiplikation zurückführen müssen. Es gilt hier eine, für den Computer berechenbare Funktion zu finden, die trigonometrische Funktionen angleicht.

Die Punkte 2 und 3 sind von mathematischem Interesse und sollen hier untersucht werden. Zum Berechnen der gesuchten Funktion gibt es viele Verfahren. Das wichtigste und auch bekannteste dürfte das Verfahren kleinster Fehlerquadrate sein. Um die Menge der möglichen Funktionen einzuschränken, werden im folgenden trigonometrische Funktionen der Form

$$f(x)=a_1\cdot\sin(b_1x+c_1)+a_2\cdot\sin(b_2x+c_2)+\ldots+a_n\cdot\sin(b_nx+c_n)$$

untersucht, die durch ein Polynom beliebigen Grades angenähert werden.

Kapitel 1:

Beschreibung des Verfahrens kleinster Fehlerquadrate[1][2]

Wir nehmen an, die Punkte $(x_1,y_1),(x_2,y_2), \ldots (x_n,y_n)$ wären gegeben. Diese Punkte könnten z.B. die Ergebnisse eines naturwissenschaftlichen Experimentes sein. Man könnte sie sich aber auch dadurch entstanden denken, daß verschiedene Argumente x_i in eine zu approximierende Funktion f eingesetzt wurden, um so die Werte y_i zu erhalten. In jedem Fall soll ein Polynom gefunden werden, das alle Punkte möglichst gut annähert.
Das Polynom soll vom Grad m sein und die Form

$$p(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$$

haben.
Beide Funktionen, f und p, sollen sich in etwa gleichen d.h. die Funktionswerte gleicher Argumente sollen nahe beieinander liegen. Als Maß könnte man die Summe aller absoluten Fehler nehmen, also

$$S=\sum_{i=1}^{n} |p(x_i)-f(x_i)|$$

Da sich der Betrag jedoch sehr schlecht ableiten läßt (was später nötig wird), greift man auf die Quadrate der Fehler zurück. Man erhält:

$$S=\sum_{i=1}^{n} (p(x_i)-f(x_i))^2 \quad \text{(daher:kleinste Fehlerquadrate)}$$

oder

$$S=\sum_{i=1}^{n} (a_o+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_mx_i^m-y_i)^2$$

Diese Summe S soll nun möglichst klein sein. Eine Funktion hat ein Extrem, wenn die erste Ableitung gleich Null ist. Da die Abweichung S unendlich groß werden kann, muß bei einem Extrem ein Minimum vorliegen. Da S aber von vielen Variabeln abhängt (a_o bis a_m), erhält man das Minimum, indem man S partiell nach diesen Variabeln ableitet.

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial S}{\partial a_o}=2\sum_{i=1}^{n}(a_o+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_mx_i^m-y_i)=o$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=2\sum_{i=1}^{n}(a_o+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_mx_i^m-y_i)x_i=o$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m}=2\sum_{i=1}^{n}(a_o+a_1x_i+a_2x_i^2+\ldots+a_mx_i^m-y_i)x_i^m=o$$

Man formt dieses System noch etwas um

$$a_o\sum_{i=1}^{n}1 \quad +a_1\sum_{i=1}^{n}x_i \quad +a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad +\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^m =\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$a_o\sum_{i=1}^{n}x_i \quad +a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad +a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^3 \quad +\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$\vdots$$

$$a_o\sum_{i=1}^{n}x_i^m \quad +a_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}+a_2\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+2}+\ldots+a_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m} =\sum_{i=1}^{n}x_i^my_i$$

Man führt nun eine neue Bezeichnung ein:

$$s_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k \qquad (k=o,1,\ldots 2m)$$

und

$$t_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^ky_i \qquad (k=o,1,\ldots m)$$

Damit ergibt sich folgendes Gleichungsystem:

$$a_os_o \quad +a_1s_1 \quad +a_2s_2 \quad +\ldots+a_ms_m \quad =t_o$$

$$a_os_1 \quad +a_1s_2 \quad +a_2s_3 \quad +\ldots+a_ms_{m+1}=t_1$$

$$\vdots$$

$$a_os_m \quad +a_1s_{m+1}+a_2s_{m+2}+\ldots+a_ms_{2m} =t_m$$

Dieses System läßt sich eindeutig lösen und man erhält die Koeffizienten $a_o, a_1, \ldots a_m$, die das Polynom mit der geringsten quadratischen Abweichung zur Urfunktion bilden.
Da das Lösen eines linearen Gleichungssystems ab einer gewissen Größe aufwendig wird, sei hier auf das Gaußsche Eliminationsverfahren verwiesen (Kap. 3 Teil b).

Kapitel 2:
Anwendung des Verfahrens am Beispiel einer trigonometrischen Funktion

Will man eine Funktion f approximieren, sind folgende Punkte einzuhalten:

1. Erzeugung von Stützpunkten
   Da die Funktion f an sich ungreifbar ist, zieht man eine bestimmte Anzahl Punkte (x_i, y_i) heran, die alle auf dem Funktionsgraph liegen, sogenannte Stützpunkte. Je dichter diese Punkte liegen, je mehr Punkte also berechnet werden, umso besser repräsentieren diese Punkte natürlich den eigentlichen Graph. Der Rechenaufwand steigt dann aber auch, so daß ein geeigneter Kompromiß zwischen Genauigkeit und Arbeitsaufwand gefunden werden muß. (Kap 4 Teil c)
2. Bestimmung der Variabeln s_k und t_k nach den Formeln aus Kap. 1
3. Das so gewonnene Gleichungssystem lösen

Diese drei Punkte werden nun auf ein Beispiel angewandt. Die Funktion $f(x)=\sin x$ soll im Intervall $[o;3]$ durch ein Polynom 2ten Grades angenähert werden. Die Rechnungen werden mit zwei Nachkommastellen durchgeführt.

Punkt 1:
Die Anzahl der Stützpunkte soll 7 betragen, also n=7.
Damit erhält man folgende Wertetabelle:

x	o	o,5	1	1,5	2	2,5	3
y	o,oo	o,48	o,84	1,oo	o,91	o,6o	o,14

(Der Sinus wurde im Bogenmaß berechnet)

In diesem Fall liegen benachbarte Argumente jeweils o,5 Einheiten entfernt d.h. die x-Koordinaten der Punkte liegen gleichmäßig auf dem Intervall [o;3] verteilt. Das ist jedoch nicht unbedingt erforderlich, denn bei dem Verfahren ist keine Bedingung an die Verteilung der Stützpunkte gestellt. Die Punkte geben aber dann den Verlauf der Funktion am genausten wieder, wenn die Zwischenräume gleich gehalten werden. Bilden sich nämlich zu große Lücken, kann die Funktion ihren Verlauf stark ändern, ohne daß sich die Veränderung in den Stützpunkten niederschlägt.

Punkt 2:

Um die Variabeln s_k und t_k zu berechnen wendet man am besten folgendes Schema an:

i	x_i^o	x_i^1	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
1	1	o	o	o	o	o,oo	o,oo	o,oo
2	1	o,5	o,25	o,13	o,o6	o,48	o,24	o,12
3	1	1	1	1	1	o,84	o,84	o,84
4	1	1,5	2,25	3,38	5,o6	1,oo	1,5o	2,24
5	1	2	4	8	16	o,91	1,82	3,64
6	1	2,5	6,25	15,63	39,o6	o,6o	1,5o	3,74
7	1	3	9	27	81	o,14	o,42	1,27
$\sum$	7 $=s_o$	1o,5 $=s_1$	22,75 $=s_2$	55,13 $=s_3$	142,19 $=s_4$	3,97 $=t_o$	6,32 $=t_1$	11,86 $=t_2$

Punkt 3:

Man gelangt zu folgendem Gleichungssystem:

$$7a_o + 1o,5a_1 + 22,75a_2 = 3,97$$
$$1o,5a_o + 22,75a_1 + 55,13a_2 = 6,32$$
$$22,75a_o + 55,13a_1 + 142,19a_2 = 11,86$$

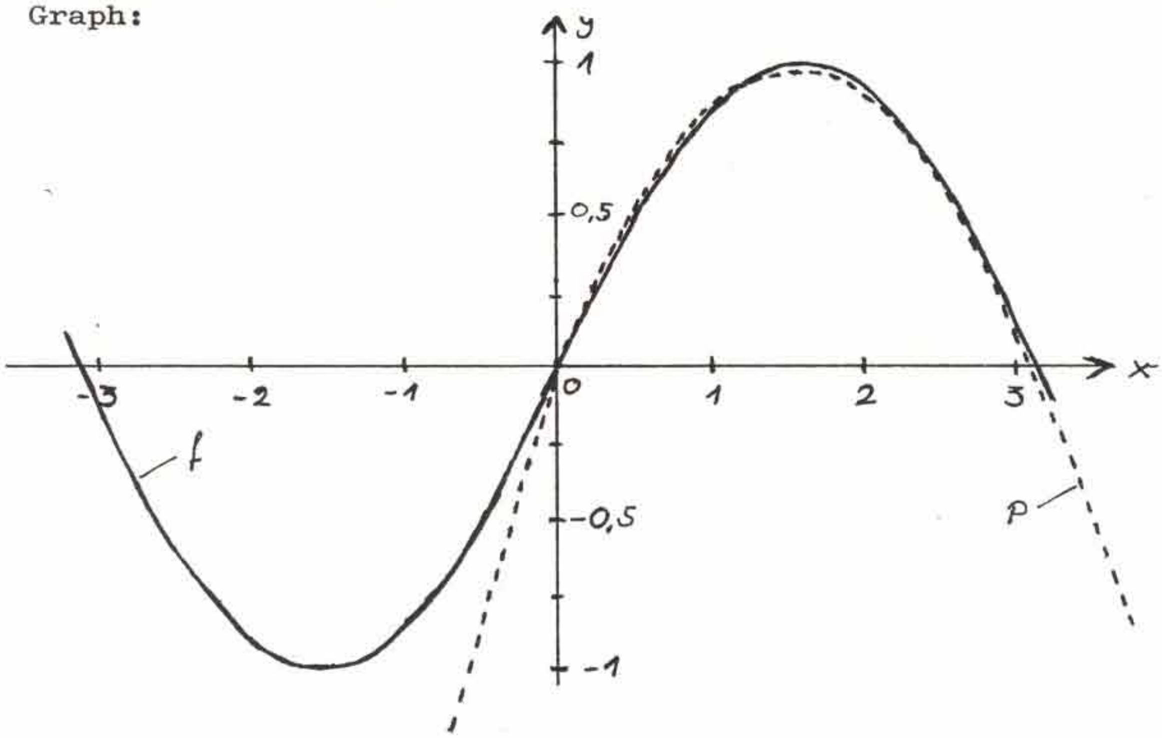
Dieses System hat die Lösung

$a_o=-o,o23$, $a_1=1,28$, $a_2=-o,41$

Die Parabel, die den Sinus zwischen o und 3 annähert lautet also

$$y=-o,o23+1,28x-o,41x^2$$

Graph:



Kapitel 3

Übertragung des Verfahrens auf eine Rechenanlage

a) Allgemeine Erläuterungen

Rechenanlagen bieten sich besonders für die Bearbeitung numerischer Verfahren an. Manche Verfahren lassen sich erst durch den Gebrauch eines Computers sinnvoll einsetzen. Dazu gehört auch das Approximationsverfahren kleinster Fehlerquadrate. Man denke nur, das Beispiel aus Kap. 2 müßte mit einem weit höheren Grad berechnet werden. Der Punkt ist schnell erreicht, wo das zu lösende lineare Gleichungssystem so große Ausmaße annimmt, daß es nicht mehr sinnvoll von Hand gelößt werden kann. Eine Rechenanlage hingegen kann das gesamte Verfahren leicht bearbeiten, denn obwohl der Weg vielschichtig und kompliziert ist, besteht er in einer strikten Abfolge von bestimmten Arbeitspunkten.

Ein Nachteil der Rechenanlagen ist die niedrige Rechengenauigkeit. So haben z.B. die meisten kleineren Rechenanlagen nur 6 gesicherte Nachkommastellen d.h. schon die 7te Stelle hinter dem Komma ist mit einem Fehler behaftet. Das erscheint auf den ersten Blick gering, jedoch muß beachtet werden, daß sich die Fehler im Laufe das Programms aufaddieren im Besonderen bei Algorithmen in denen Rechnungen sehr oft wiederholt werden also z.B. beim Lösen eines linearen Gleichungssystems. (Genaueres siehe Kap. 4)

b) Anpassungen; das Gaußsche Eliminationsverfahren [1]

Fast alle Arbeitspunkte des Verfahrens lassen sich ohne große Veränderungen auf Computer übertragen. Beim Lösen des linearen Gleichungssystems stößt man jedoch auf Probleme. Da ein Computer keine selbständigen Schlüsse ziehen kann, ist er auch nicht fähig zu entscheiden, welche Operationen das Gleichungssystem letztendlich auf die gewünschte Dreiecksform bringt. Gesucht ist also ein Verfahren, das zu jedem beliebigen Gleichungssystem die Dreiecksform liefert. Geeignet ist hierzu das Gaußsche Eliminationsverfahren:

Gegeben sei ein Gleichungssystem der Form

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\quad\vdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}
$$

Wir nehmen an, a_{11} sei ungleich Null. Sollte das nicht der Fall sein, kann eine beliebige andere Zeile i für die gilt $a_{i1} \neq 0$ mit der ersten getauscht werden.
Die oberste Zeile wird nun durch a_{11} geteilt und man erhält:

$$x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=\frac{b_1}{a_{11}}$$

Diese so veränderte erste Zeile wird nun verwendet, um in allen nachfolgenden Zeilen die erste Spalte auf Null zu setzen. Bei der zweiten Zeile z.B. geschieht dies indem die erste Zeile zuerst mit a_{21} multipliziert wird und dann von der zweiten Zeile abgezogen wird. So erhält man:

$$
\begin{aligned}
x_1+a'_{12}x_2+\ldots+a'_{1n}x_n&=b'_1\\
a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2\\
\vdots\quad&\\
a'_{n2}x_2+\ldots+a'_{nn}x_n&=b'_n
\end{aligned}
$$

(die neuen Koeffizienten werden ab jetzt mit a'_{ij} bzw. b'_i abgekürzt)
Mit dem gleichen System verfährt man mit allen Zeilen. Zuerst verändert man die zweite Zeile und sorgt dafür, daß nachfolgend die zweite Spalte verschwindet usf.

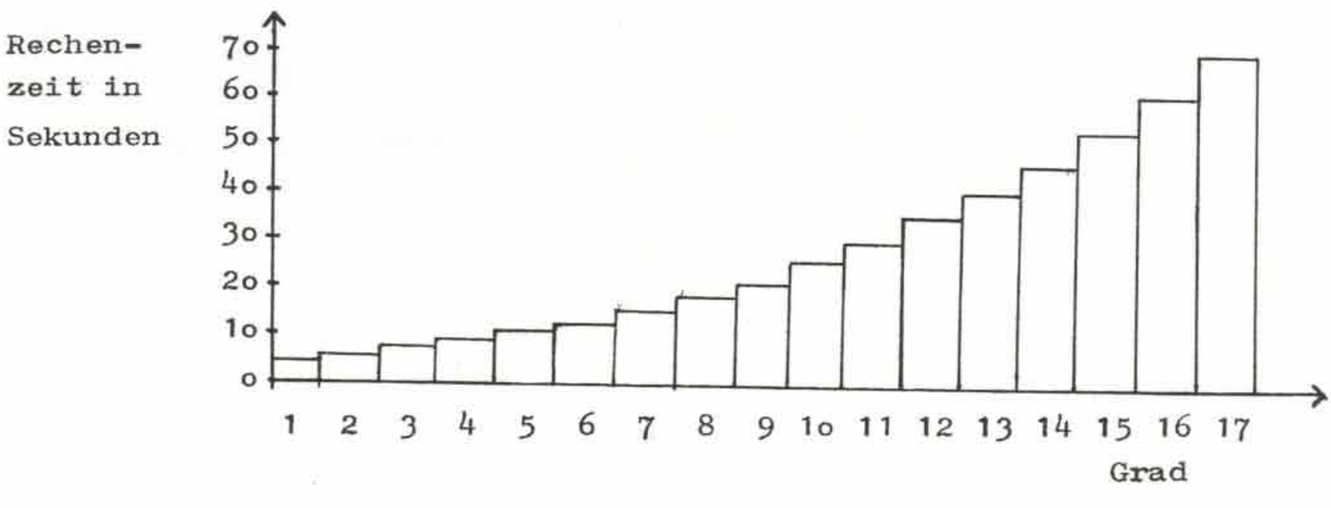
Zum Schluß erhält man:

$$
\begin{aligned}
x_1+a'_{12}x_2+a'_{13}x_3+\dots+a'_{1n}x_n&=b'_1\\
x_2+a'_{23}x_3+\dots+a'_{2n}x_n&=b'_2\\
&\vdots\\
x_n&=b'_n
\end{aligned}
$$

Somit ist das Gleichungsystem auf eine Dreiecksform gebracht; eine Lösung läßt sich leicht ablesen.

c) Rechenaufwand

Mit steigendem Grad der Anpassungspolynome wächst der Rechenaufwand, denn das zu lösende Gleichungssystem wird umfangreicher und die Summen s_k und t_k müssen für höhere Indizes berechnet werden. Ein Indikator, der die Höhe des Rechenaufwands angibt, ist die Zeit, die das Computerprogramm zum Berechnen des Polynoms braucht. Die Rechenzeit ist besonders bei großen Rechenanlagen recht teuer, darum ist es sinnvoll, einmal das Verhalten der Rechenzeit bei steigendem Grad zu untersuchen.



Die Werte wurden dem Computerprogramm bei der Funktion f(x)=sin x im Intervall [-5;5] mit 3o Stützpunkten entnommen.

Man sieht, daß die Rechenzeit nicht linear wächst sondern quadratisch. Das ist leicht zu erklären, wenn man sich das zu lösende Gleichungssystem anschaut. Erhöht sich der Grad um 1, wächst das lineare Gleichungssystem in zwei Richtungen d.h. es kommt eine Spalte und eine Zeile hinzu.

Kapitel 4:

Fehler

a) allgemein

Grundsätzlich gibt es zwei Arten von Fehlern

1: Der absolute Fehler

$$F_{abs}(x)=f_1(x)-f_2(x)$$

2: Der relative Fehler

$$F_{rel}(x)=\frac{f_1(x)-f_2(x)}{f_2(x)}$$

Dazu betrachtet man den Betrag der Fehlergrößen also $|F_{abs}|$ bzw. $|F_{rel}|$, da das Vorzeichen nur angibt, welcher Funktionswert größer ist.

Diese Größen beziehen sich jedoch nur auf ein einziges Argument. Da man jedoch Aussagen über ein ganzes Intervall $[a,b]$ treffen will, zieht man Stützpunkte x_i heran, die auf dem Intervall $[a,b]$ verteilt sind.

Es ist dann

der durchschnittliche absolute Fehler

$$F_{dabs}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|F_{abs}(x_i)|$$

und

der durchschnittliche relative Fehler

$$F_{drel}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|F_{rel}(x_i)|$$

Zusätzlich kann man das Maximum der absoluten bzw. relativen Fehler bestimmen

$$F_{maxabs}=\max|F_{abs}(x_i)|$$

und

$$F_{maxrel}=\max|F_{rel}(x_i)|$$

Es ist nicht sinnvoll, das Fehlerminimum in unserem Fall zu untersuchen, denn es ist sehr wahrscheinlich, daß die Annäherungsfunktion die Urfunktion mindestens einmal schneidet. Somit wäre $F_{minabs}\approx o$, $F_{minrel}\approx o$.

Im folgenden wird der relative Fehler nicht mehr beachtet, sondern das Augenmerk auf den durchschnittlichen und maximalen absoluten Fehler gerichtet.

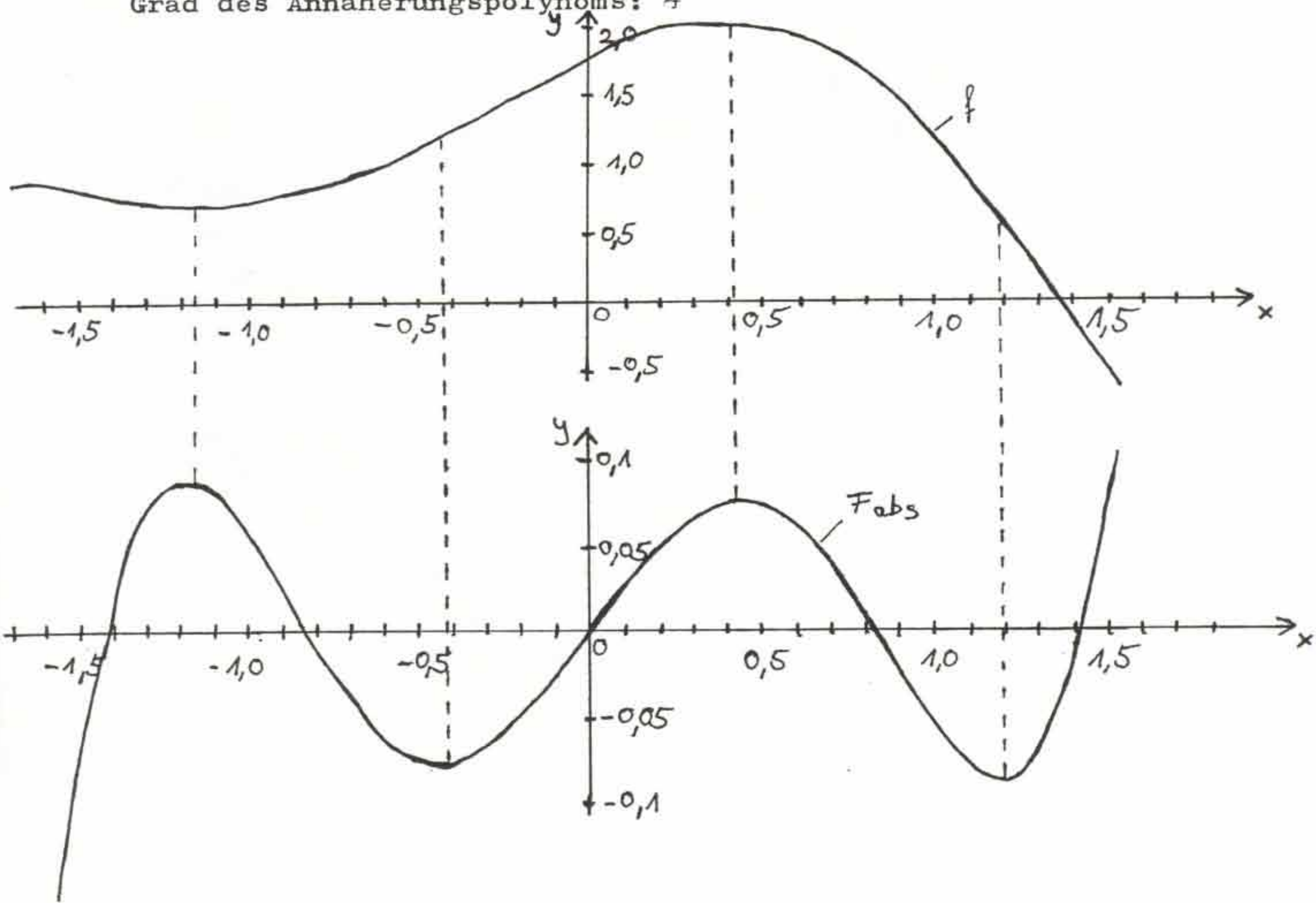
b) Verfahrensabhängige Fehler

In diesem Teil sollen die Fehler untersucht werden, die allein durch das Verfahren entstehen. Eine Differenz zwischen Annäherungspolynom und Ausgangsfunktion ist immer zu erwarten. Der Fehler würde nur dann ganz verschwinden, wenn die Ausgangsfunktion ein Polynom gleichen Grades wie des Annäherungspolynoms wäre. Aber z.B. bei trigonometrischen Funktionen wird trotz beliebiger Steigerung des Grades der Fehler nie ganz verschwinden. Es bleiben also immer noch Fehler, auch wenn diese so klein werden, daß sie nicht mehr berücksichtigt werden müssen. Interressant wäre jetzt, zu untersuchen, wo die Fehler im Intervall groß sind und wo die Fehler gering gehalten werden, oder anders ausgedrückt: an welchen Punkten weicht das Annäherungspolynom stark von der Urfunktion ab, und wo ist es sehr genau.

Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, betrachten wir zwei Beispiele, indem die Urfunktion und die Fehlerkurve direkt untereinander geschrieben wird.

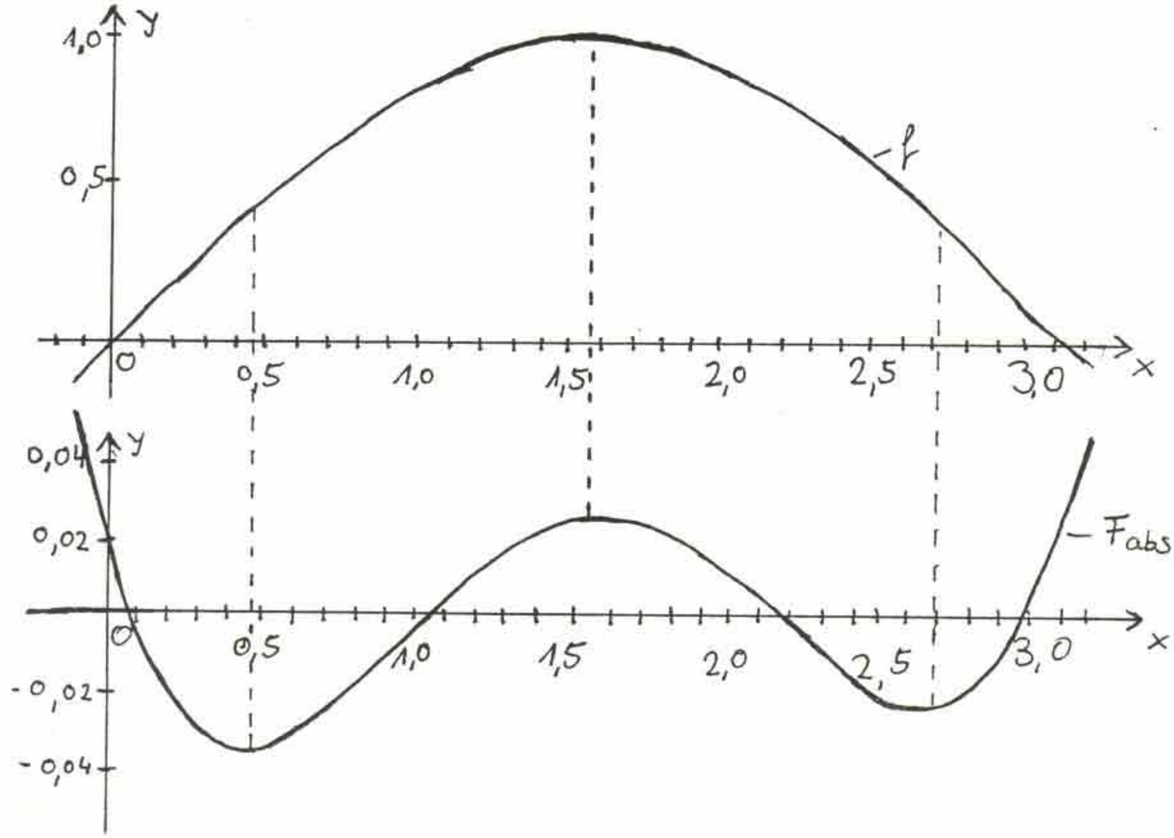
1. Beispiel: f(x)=sin(sx)+2sin(x+2) im Intervall [-1,5;1,5]

Grad des Annäherungspolynoms: 4



2. Beispiel: f(x)=sin x im Intervall [o;3]

Grad des Annäherungspolynoms: 2



Folgende auffällige Gemeinsamkeiten treten auf:

1: Die Fehlerkurve ist an den Intervallgrenzen am steilsten und außerhalb des angegebenen Intervalls wächst die Kurve sehr schnell an bzw. fällt schnell ab. Das ist nicht verwunderlich, denn das Polynom soll die Urfunktion nur in den Grenzen annähern; außerhalb weicht es natürlich sehr stark ab.

2: Dort,wo die Urfunktion ein lokales Extrem hat, befindet sich bei der Fehlerkurve ein Maximum.

3: Dort, wo bei der Fehlerkurve ein lokales Minimum vorliegt, hat die Urfunktion eine große Steigung oder fällt stark ab.

Der 3. Effekt wird unter Umständen stark vom 1. Effekt beeinflusst, dann nämlich, wenn eine große Steigung nahe an der Intervallgrenze liegt. In diesem Fall liegt das Minimum der Fehlerkurve etwas weiter innen, denn ganz außen tritt der Effekt 1 ein, also große Steilheit der Fehlerkurve.

Aus diesen Effekten kann man folgendes Ergebnis ablesen:
An lokalen Extremen und starken Steigungen der Ausgangsfunktion ist der Fehler sehr groß; jeweils dazwischen ist er am geringsten.

c) Rechnerspezifische Fehler
In diesem Teil sollen Fehler untersucht werden, die einfach durch den Umstand entstehen, daß eine Rechenanlage verwendet wird.
Da eine Rechenanlage einen endlichen Speicher besitzt, kann sie Zahlen auch nur mit endlicher Stellenzahl darstellen. Die letzte dargestellte Ziffer ist somit gerundet und mit einem Fehler behaftet, der sich je nach Art des zu lösenden Problems mehr oder weniger stark fortpflanzt. Bei dem hier vorliegenden Problem kann man von einer relativ starken Fehlerfortpflanzung sprechen, so daß die Frage auftaucht:
Ist es überhaupt noch sinnvoll, einen Mehraufwand aufzubieten, obwohl zu erwarten ist, daß durch den großen Fehler das Ergebnis zu sehr verfälscht ist ?
Dieser Mehraufwand kann in unserem Fall zweierlei bedeuten:
1: Die Anzahl der Stützpunkte wird erhöht
2: Der Grad des Annäherungspolynoms wird erhöht
Es soll untersucht werden, bis zu welcher Grenze der Mehraufwand noch lohnt.

Punkt 1:

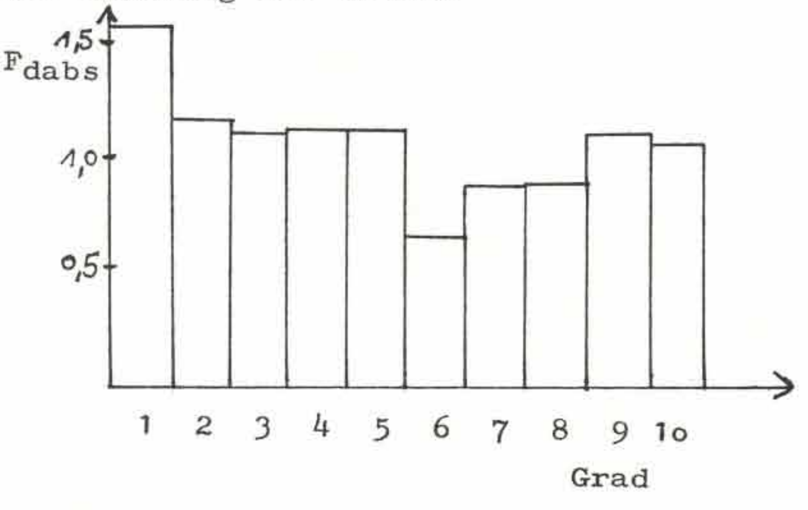
Zur Erhöhung der Stützpunktzahl

Stützpunktzahl	durchschn. abs. Fehler
5	5,6929
1o	1,2238
15	o,6729
2o	o,5988
25	o,5844
3o	o,5155
35	o,4854
4o	o,4942
45	o,5057
5o	o,49o6

Die Tabelle wurde erstellt bei der Funktion
$f(x)=2\sin(3x)+\sin(x+1)$. Der Grad des Annäherungspolynoms war 8.

Eigentlich müsste der Fehler abnehmen, wenn man die Anzahl der Stützpunkte erhöht, denn die Funktion wird durch die Stützpunkte besser repräsentiert, da die Lücken kleiner sind. Die Realität weicht jedoch in einem Punkt ab:
Bis zu 35 Stützpunkten nimmt der Fehler wie erwartet, erst rapide, dann langsamer, ab. Bei 4o Stützpunkten nimmt der Fehler jedoch wider erwarten zu. Danach pendeln sich die Fehler um o,5 ein; eine Verbesserung tritt also nicht mehr ein. Für dieses Verhalten kann nur die Fehlerfortpflanzung verantwortlich gemacht werden.
Fazit: Um ca. 35 Stützpunkte reichen für die Abarbeitung dieses Programms völlig aus.

Punkt 2:
Zur Erhöhung des Grades



Die Tabelle wurde bei der Funktion
$f(x)=\sin(2x)+3\sin(x+1)+2\sin(5x-3)$
im Intervall $[o;3]$ erstellt.

Auch hier müsste erwartet werden, daß sich der Mehraufwand lohnt, doch nach dem Tiefpunkt beim Grad 6 steigt der Fehler wieder an. Auch hier ist die mangelnde Rechengenauigkeit schuld.
Das Fazit hier:
Leider kann hier kein einheitlicher Grad angegeben werden, der für jedeFunktion die besten Ergebnisse liefert, denn das Verhalten der Urfunktion ist hierbei von entscheidender Bedeutung. In jedem Fall ist Grad 8 die Obergrenze der Verläßlichkeit, bis zu der man noch bedenkenlos gehen kann.

Literatur

1)

Helmut Selder

Einführung in die Numerische Mathematik
für Ingenieure

2)

B.P. Demidowitsch

Numerische Methoden der Analysis

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.
Insbesondere versichere ich, daß ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Trier, den 11.6. 1984

....
(Unterschrift)